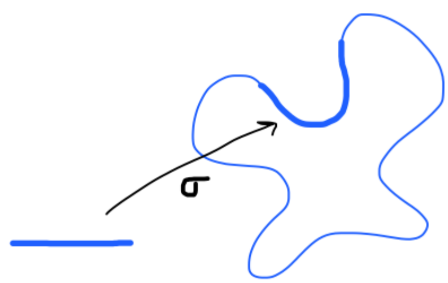
Curvas y superficies suaves.

Vamos a considerar forma local extrinseca e intrinseca de las curvas y las superficies *suaves*, que son las que no tienen picos ni crestas y que vistas de cerca se parecen mucho a una recta o a un plano. Estas están definidas por funciones diferenciables con una condición extra (regularidad) que garantiza que en cada punto tienen líneas o planos tangentes bien definidos.

Curvas regulares.

Una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto c que localmente es la imagen de un intervalo bajo una función derivable e inyectiva $\sigma : I \to \mathbb{R}^n$.



La función σ es una **parametrización** local de la curva.

Uno podría pensar que las curvas diferenciables no pueden tener picos, pero esto no siempre es cierto. La derivada $\sigma'(t)$ da vectores tangentes a la curva en cada punto, que determinan la dirección de la curva excepto si $\sigma'(t)$ se anula. Si $\sigma'(t)$ nunca se anula entonces la curva tiene una tangente bien definida en cada punto y decimos que la curva es **regular**.

Ejemplos.

a. La curva parametrizada por $\sigma(t) = (t^3, t^2 + t)$ tiene derivada $\sigma‘(t) = (3t^2, 2t + 1)$ que no se anula en ningún punto, así que la curva tiene una tangente bien definida en cada punto y la curva es regular.

b. La curva parametrizada por $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ tiene derivada $\sigma‘(t) = (2t, 3t^2)$ que se anula cuando $t = 0$ así que la curva es regular en todos sus puntos excepto en (0,0), donde la curva no tiene una dirección bien definida y de hecho tiene un pico.

Si $\sigma : I \to c$ es una curva regular, la derivada $\sigma'(t)$ indica la dirección de la curva en el punto. La misma curva se puede parametrizar de distintas maneras, que dependen de la rapidez y el sentido en que recorramos la curva y de donde empecemos. Si recorremos la curva con rapidez constante 1 ($|\sigma'(t)| \equiv 1$) entonces el parámetro t corresponde a la distancia recorrida a lo largo de la curva, y decimos que la curva esta parametrizada por longitud de arco.

Todas las curvas regulares tienen la misma forma local intrínseca, independiente del $\mathbb{R}^n$ donde estén, ya que una parametrización por longitud de de arco da una isometría local de un intervalo a la curva.

La forma local extrínseca de las curvas es mas sutil y debe depender de como se curvan. Si la curvatura de una recta es 0 y la curvatura de un círculo de radio r es $k = 1/r$ (de modo que entre mas chico sea el circulo esta mas curvado) entonces la curvatura de una curva podría ser la curvatura del circulo que mejor la aproxima en cada punto. Si la curva está en el plano podemos asignarle un signo a la curvatura dependiendo del lado de la curva en que esté el círculo. Ahora vamos a hacer esto con mas formalmante.

Si $|\sigma'(t)| \equiv 1$ entonces $\sigma''(t)$ es un vector perpendicular a $\sigma'(t)$. Definimos la **curvatura** de la curva como $k = |\sigma''(t)|$. Para las curvas en $\mathbb{R}^2$ podemos darle un signo a la curvatura, ya que $\sigma''(t)$ es un múltiplo real del vector $n(t)$ que se obtiene girando 90^o a $\sigma'(t)$ y definimos la curvatura como el numero real k tal que $\sigma''(t) = kn(t)$. En este caso si recorremos la curva en sentido opuesto la dirección de $n(t)$ se invierte y la curvatura cambia de signo.

Ejemplo. El círculo de radio r centrado en (0,0) puede parametrizarse como $\sigma(t) = (rcos(t/r), sen(t/r))$. Entonces $\sigma'(t) = (-sen(t/r), cos(t/r))$ de modo que $|\sigma'(t)| = 1$, $n(t) = (-cos(t/r), sen(t/r))$ y $\sigma''(t) \cdot n(t) = (-1/r\ sen(t/r), -1/r\ cos(t/r))| = \frac{1}{r}$ y podemos calcular la curvatura del círculo en cada punto como como $\sigma''(t) \cdot n(t) = (-1/r\ sen(t/r), -1/r\ cos(t/r))| = \frac{1}{r}$.

Si $\alpha(t)$ es una curva parametrizada con $|\alpha`(t)| \equiv 1$ y $\delta(t)$ es el ángulo que forma el vector tangente $\alpha`(t)$ con el vector horizontal $(1, 0)$ entonces $\alpha'(t) = (cos(\delta(t), sen(\delta(t))$ para alguna función $\delta(t)$.

Por lo tanto $\alpha''(t) = (-\delta'(t)sen(\delta(t)), \delta'(t)cos(\delta(t))$ y $n = (-sen(\delta(t), cos(\delta'(t))$

Así que $k = (-\delta'(t)sen(\delta(t)), \delta'(t)cos(\delta(t)) \cdot (-sen(\delta(t), cos(\delta(t)) = \delta'(t)$

Por lo tanto la curvatura mide la rapidez con que cambia la dirección de la curva.

Cuando $|\sigma'(t)|$ no es constante podemos calcular la curvatura proyectando $\sigma''(t)$ en la dirección del vector normal $n(t)$ (que se obtiene dividiendo $\sigma'(t)$ entre su norma y girandolo 90^o) y dividiendo entre la norma de $\sigma'(t)$, es decir

$$k(t) = \frac{\sigma''(t) \cdot n(t)}{|\sigma'(t)|}$$

Para ver que esto realmente da la curvatura hay que ver que el resultado no depende de la parametrización (tarea).

Problemas

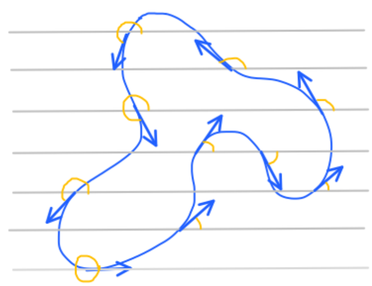
1. Muestra que si $\sigma(t)$ es una parametrización de una curva, entonces $|\sigma'(t)|$ es constante si y solo si $\sigma''(t)$ es perpendicular a $\sigma'(t)$.

2. Muestra que si $\sigma(t)$ es cualquier parametrización regular de una curva en el plano entonces $\sigma''(t) \cdot n/|\sigma'(t)|$ es independiente de la parametrización (excepto por el signo), por lo que esta es la curvatura (las reparametrizaciónes se obtienen haciendo un cambio de variable $t = h(s)$).

3. Calcula la curvatura de la parábola $\sigma(t) = (t, t^2)$.

Decimos que una curva es *simple* si no se autointersecta, y que es *cerrada* si termina donde empezó.

Si una curva es suave entonces tiene una dirección definida en cada punto y el ángulo que forma con una dirección fija en el plano varía continuamente. Como el ángulo solo está bien definido salvo múltiplos de 2π, al darle toda la vuelta a la curva el ángulo puede haber cambiado por un múltiplo entero de 2π, como muestra la figura:



Teorema del giro de las tangentes. Si c es una curva simple cerrada suave en el plano, orientada en la dirección opuesta a las manecillas del reloj entonces

$$\int_c k = 2\pi$$

En otras palabras: *La curvatura total de cada curva simple cerrada suave en el plano es 2π.*

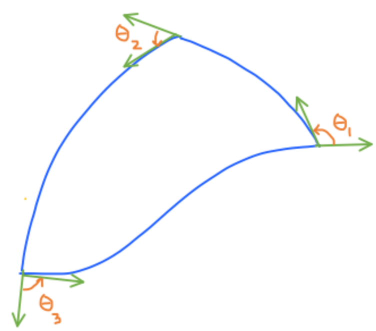
Idea de la prueba. Si $\sigma : [a, b] \to c$ es una parametrización regular de la curva y $\delta(t)$ es una función que mide el ángulo entre $\sigma'(t)$ y una dirección fija entonces $\int_c k = \int_a^b \delta'(t)dt = \delta(b) - \delta(a) = 2n\pi$ para algún entero n (ya como la curva es cerrada y suave entonces $\sigma(a) = \sigma(b)$ y $sigma'(a)$ y $\sigma'(b)$ tienen la misma dirección). El chiste está en mostrar que si la curva es simple entonces $n = \pm 1$ (o sea que al recorrer la curva las tangentes dan una vuelta neta). Intuitivamente esto es claro, pero hay que demostrarlo. $\square$

El teorema puede generalizarse a curvas con una cantidad finita de esquinas (puntos donde la dirección cambia abruptamente), contando los brincos en la dirección dados por los ángulos θ_i entre las tangentes orientadas en las esquinas.

Corolario . Si c es una curva simple cerrada en el plano formada por arcos suaves y está orientada en la dirección opuesta a las manecillas del reloj entonces

$$\int_c k + \sum \theta_i = 2\pi$$

donde θ_i es el ángulo (positivo y menor que 2π) entre las tangentes en la esquina i.



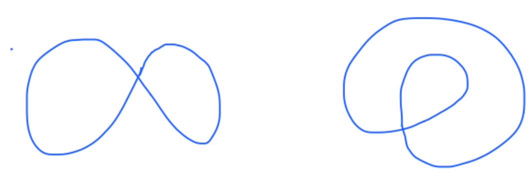
Idea de la prueba. Podemos reemplazar las esquinas de la curva c por arcos de círculo de un radio pequeño r de modo que quede una curva suave c_r. Si denotamos a las esquinas que le quitamos a c por e_i y a los arcos de circulo que le pusimos por a_i entonces $\int_c k = \int_{c_r} k + \sum \int_{e_i} k - \int_{a_i} 1/r$

Si tomamos círculos de radio cada vez mas chico, los arcos e_i se vuelven cada vez mas cortos y mas rectos por lo que $\int_{e_i} k \to 0$ mientras que $\int_{a_i} 1/r \to \theta_i$, así que $\int_c k = \int_{c_r} k - \sum \theta_i = 2\pi - \sum \theta_i$. $\square$

Ejemplo. En el caso de un poligono con lados rectos, el teorema dice que los ángulos *externos* de cada polígono en el plano suman 2π.

Problemas

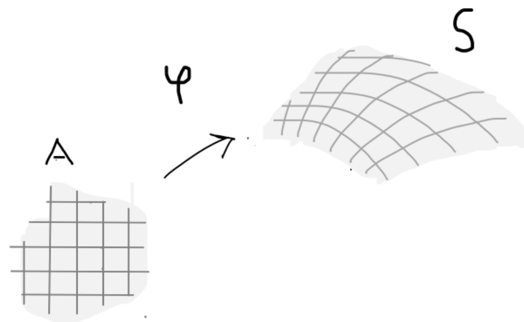
4. Calcula $\int_c k$ para las siguientes curvas suaves no simples.



5. Muestra que para cada curva cerrada c en $\mathbb{R}^n$, $\int_c k \geq 2\pi$ y que si la igualdad se da la curva está en un plano.

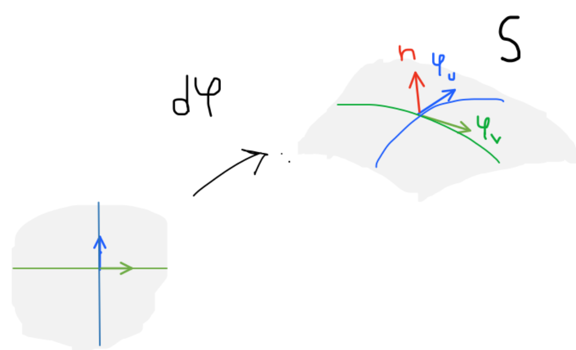
Superficies regulares

Una superficie diferenciable en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ que localmente es la imagen de un abierto del plano bajo una función diferenciable e biyectiva $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$



Cada función ϕ es una **parametrización** local de la superficie, y su inversa ϕ^{-1} da **coordenadas locales** para la superficie.

Aunque parecería que las superficies diferenciables no pueden tener picos o dobleces esto no siempre es cierto. La derivada $d\phi_{(u,v)}$ en cada punto (u, v) de A es una función lineal que envía los vectores tangentes al plano a vectores tangentes a la superficie en el punto $\phi(u, v)$. Si la derivada $d\phi_{(u,v)}$ es inyectiva (no manda vectores distintos de 0 al vector 0) entonces la imagen de $d\phi_{(u,v)}$ es un plano tangente a la superficie en el punto $\phi_{(u,v)}$ y la superficie debe se suave en ese punto. Si $d\phi_{(u,v)}$ es inyectiva en todos los puntos la superficie no puede tener picos o crestas y decimos que la superficie es **regular**. Los planos tangentes a una superficie regular S están generados por las imágenes de los vectores básicos (1,0) y (0,1) bajo $d\phi$, que son las derivadas parciales ϕ_u y ϕ_v.



Si la superficie S está en $\mathbb{R}^3$ entonces hay una única dirección perpendicular a ella en cada punto, que esta dada por el vector normal unitario $n = \frac{1}{|\phi_u \times \phi_v|}\phi_u \times \phi_v$.

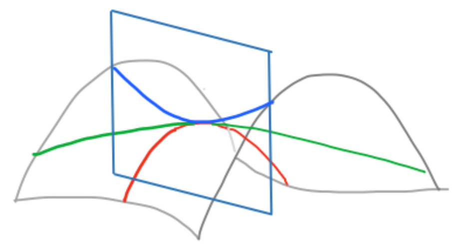
Ejemplo. El paraboloide hiperbólico dado por $\phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ es una superficie regular: los vectores $\phi_u = (1, 0, 2u)$ y $\phi_v = (0, 1, -2v)$ son linealmente independientes y generan al plano tangente en el punto $\phi(u, v)$. Un vector unitario normal a S es $n = \frac{1}{|\phi_u \times \phi_v|}\phi_u \times \phi_v = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u, -2v, 1)$

Ejemplo. La función $\phi(u, v) = (cos(u)cos(v), cos(u)sen(v), sen(u))$ definida para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ envuelve al plano sobre la esfera una infinidad de veces. ϕ da una parametrización local de la esfera sin los polos al restringirla a rectángulos abiertos como $-\pi/2 < u < \pi/2, \pi < v < \pi$, donde es inyectiva.

$\phi_u = (-sen(u)cos(v), -sen(u)sen(v), cos(u))$
$\phi_v = (-cos(u)sen(v), cos(u)cos(v), 0)$
y $n = (-cos(u)cos(v), cos(u)sen(v), -sen(u)cos(u))$

La parametrización es regular ya que n solo se anula cuando $cos(u) = 0$ (en los polos).

La forma local extrínseca de una superficie regular S en $\mathbb{R}^3$ depende de la forma en que esta se curva en el espacio La curvatura puede depender del punto y también de la dirección. Si p es un punto de S entonces cada vector tangente v en p determina un plano perpendicular a S, y este plano corta a S en una curva. La curvatura de esta curva en p es llamada la **curvatura direccional** de S en la dirección de v, y podemos darle un signo dependiendo de la dirección del vector normal n. Los valores máximo y mínimo de la curvaturas direccionales en cada punto p de S son las **curvaturas principales** de S en p y su producto es la **curvatura gaussiana** K de la superficie S en p.



Ejemplo. En un plano, los planos normales cortan en líneas rectas, así que todas las curvaturas direccionales son 0 y la curvatura gaussiana es 0.

Ejemplo. En una esfera de radio r, los planos normales en un punto cortan a la esfera en círculos de radio r, así que las curvaturas principales son ambas $= 1/r$ y la curvatura gaussiana es $K = 1/r^2$.

Ejemplo. En el paraboloide hiperbólico $\phi(u, v) = (u, v, uv)$ las curvaturas direccionales en el punto (0,0,0) son 0 en las direcciones de ϕ_u y ϕ_v y distintas de 0 en otras direcciones.

Las curvaturas direccionales hablan de la forma extrínseca de S, pero no necesariamente de su forma intrínseca: las curvaturas pincipales no son invariantes de la forma intrínseca.

Ejemplo. El plano y el cilindro parabólico tienen la misma forma intrínseca aunque sus curvaturas principales son distintas.

¿Entonces como podemos medir la curvatura intrínseca de S? Vamos a ver que el producto de las curvaturas principales (la curvatura gaussiana) sí es un invariante de la forma intrínseca. .

Problemas

6. Calcula las curvaturas principales y la curvatura gaussiana del paraboloide hiperbólico $\phi(u, v) = (u, v, uv)$ en (0,0,0).

7. Calcula la curvatura gaussiana del cilindro parabólico $\phi(u, v) = (u, v, v^2)$.

La primera forma fundamental.

En cada superficie regular S podemos medir longitudes, ángulos y áreas sin salir de la superficie. Estas cantidades corresponden a la geometría intrínseca de la superficie.

Una parametrización local $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to S$ deforma el subconjunto A del plano para convertirlo en una parte de la superficie. La derivada $d\phi_{(u.v)}$ manda vectores tangentes al plano en el punto (u,v) a vectores tangentes a la superficie en el punto $\phi(u,v)$, y podemos ver como cambian las longitudes, ángulos y áreas al aplicar ϕ viendo como cambian los productos internos de los vectores al aplicar $d\phi_{(u.v)}$.

Si $[a,b]$ y $[c,d]$ son dos vectores tangentes en un punto (u,v) en el plano, sus imágenes bajo $d\phi_{(u.v)}$ son

$$d\phi_{(u.v)}[a,b] = a\phi_u + b\phi_v \quad \text{y} \quad d\phi_{(u.v)}[c,d] = c\phi_u + d\phi_v.$$

El producto interno es una forma bilineal determinada por los productos internos de los vectores basicos.

El producto interno de los vectores $[a,b]$ y $[c,d]$ en el plano es $ac + bd = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$

y el producto interno de las imágenes de $[a,b]$ y $[c,d]$ bajo la derivada $d\phi_{(u,v)}$ es

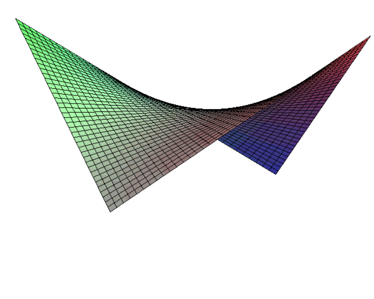
$$d\phi[a,b] \cdot d\phi[c,d] = (a\phi_u + b\phi_v) \cdot (c\phi_u + d\phi_v) =$$
$$= ac\ \phi_u \cdot \phi_u + ad\ \phi_u \cdot \phi_v + bc\ \phi_v \cdot \phi_u + bd\ \phi_v \cdot \phi_v = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_u \cdot \phi_u & \phi_v \cdot \phi_u \\ \phi_u \cdot \phi_v & \phi_v \cdot \phi_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Así que el producto interno en el plano tangente a S en la base ϕ_u, ϕ_v está dado por la matriz

$$I_\phi = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_u \cdot \phi_u & \phi_v \cdot \phi_u \\ \phi_u \cdot \phi_v & \phi_v \cdot \phi_v \end{bmatrix} \quad (la\ primera\ forma\ fundamental\ de\ S)$$

Para conocer la forma intrínseca de la superficie parametrizada localmente por $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ basta conocer la matriz I_ϕ para cada punto de A, ya que V tiene la misma forma intrínseca que A con el producto interno dado por I_ϕ.

Ejemplo. Para el paraboloide hiperbólico parametrizado como $\phi(u,v)$



$\phi_u = (1, 0, 2u)$ y $\phi_v = (0, 1, -2v)$ así que

$$I_\phi = \begin{bmatrix} 1 + 4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1 + 4v^2 \end{bmatrix}$$

El paraboloide hiperbólico tiene la misma forma intrínseca que el plano con este producto interno.

Ejemplo. Para la esfera de radio r parametrizada por
$\phi(u,v) = (cos(u)cos(v), cos(u)sen(v), sen(u))$

$\phi_u = (-sen(u)cos(v), -sen(u)sen(v), cos(u))$
$\phi_v = (-cos(u)sen(v), cos(u)cos(v), 0)$

$$I_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & cos^2(u) \end{bmatrix}$$

La esfera tiene la misma forma intrínseca local que el plano con este producto interno, excepto en los puntos donde $cos(u) = 0$.

Problemas

8. Calcula la primera forma fundamental para la superficie dada por $\phi(u,v) = (u, u+v, u^2+v^3)$. ¿Cuanto cambia la longitud de los vectores la función ϕ en el punto (1,2)? ¿Cuanto cambia el área la función ϕ en el punto (1,2)?

9. Muestra que si una superficie S está parametrizada por $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ entonces $Area(S) = \int_U \sqrt{det(I_\phi)}$.

10. ¿Puedes encontrar superficies regulares cuyas primeras formas fundamentales estén dadas por:
    a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4v^2 \end{bmatrix}$? b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4v^2 \end{bmatrix}$? c. $\begin{bmatrix} 1 & 2v \\ 2v & v^2 \end{bmatrix}$?

La segunda forma fundamental.

Ahora vamos a pensar en la geometría extrínseca de una superficie regular S en $\mathbb{R}^3$, en la manera en que S se curva en el espacio.

Si $\phi(u,v)$ es una parametrización local de S, las derivadas parciales ϕ_u y ϕ_v son vectores tangentes a S y $n = \frac{1}{|\phi_u \times \phi_v|}\phi_u \times \phi_v$ es un vector unitario normal a S. Las segundas derivadas parciales ϕ_{uu}, $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ y ϕ_{vv} miden como cambian ϕ_u y ϕ_v. Para ver como se curva la superficie hay que ver como cambia el vector normal n.

Las segundas derivadas tienen componentes tangenciales a la superficie (que no cambian el plano tangente y por lo tanto no cambian el vector normal) y componentes normales a la superficie (que si cambian al plano tangente y por lo tanto al vector normal). Las componentes normales están dadas por los productos internos de las segundas derivadas con n, que podemos escribir en una matriz:

$$II_\phi = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{uu} \cdot n & \phi_{uv} \cdot n \\ \phi_{vu} \cdot n & \phi_{vv} \cdot n \end{bmatrix} \quad (la\ segunda\ forma\ fundamental\ de\ S)$$

Ejemplo. Para el paraboloide hiperbólico parametrizado como $\phi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$

$\phi_u = (1, 0, 2u) \qquad \phi_v = (0, 1, -2v)$

$\phi_{uu} = (0, 0, 2) \qquad \phi_{uv} = \phi_{vu} = (0, 0, 0) \qquad \phi_{vv} = (0, 0, -2)$

$n = \frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}(-2u, -2v, 1)$

$$II_\phi = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{bmatrix}$$

La primera y segunda formas fundamentales dependen de la parametrización de la superficie: al cambiar la parametrización las formas fundamentales cambian. Para medir como se curva la superficie (intrinsecamente o extrinsecamente) necesitamos algo independiente de la parametrización. Recordar que para medir la curvatura de una curva parametrizada $\alpha : I \to c$ tomamos la componente normal de la segunda derivada $\alpha''(t)$ y la dividimos entre la norma de la primera derivada $\alpha'(t)$. En el caso de las superficies, podemos hacer algo análogo tomando el cociente $det(II_\phi)/det(I_\phi)$. Vamos a mostrar que este número no depende de la parametrización de S y veremos cual es su significado geométrico.

Problemas

11. Demuestra que $\begin{bmatrix} \phi_{uu} \cdot n & \phi_{uv} \cdot n \\ \phi_{vu} \cdot n & \phi_{vv} \cdot n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_u \cdot n_u & \phi_u \cdot n_v \\ \phi_v \cdot n_u & \phi_v \cdot n_v \end{bmatrix}$

    La segunda matriz corresponde a la forma cuadrática que a cada vector en el plano le asocia el producto punto de sus imágenes bajo las derivadas de las funciones $\phi(u,v)$ y $n(u,v)$.

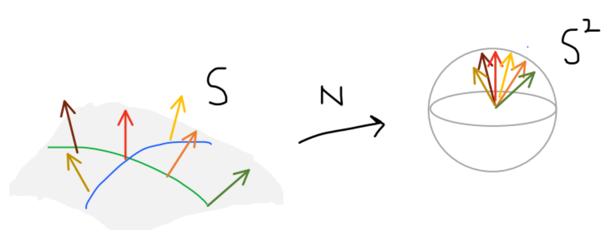
12. Muestra que se cumplen las siguientes igualdades.

    a. $\phi_{uu} \cdot \phi_u = \frac{1}{2}E_u \qquad \phi_{vu} \cdot \phi_u = \phi_{uv} \cdot \phi_u = \frac{1}{2}E_v \qquad \phi_{uu} \cdot \phi_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$

    b. $\phi_{vv} \cdot \phi_v = \frac{1}{2}G_v \qquad \phi_{uv} \cdot \phi_v = \phi_{vu} \cdot \phi_v = \frac{1}{2}G_u \qquad \phi_{vv} \cdot \phi_u = F_v - \frac{1}{2}G_u$

La función de Gauss

Si S es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, una **función de Gauss** es una función continua $N : S \to \mathbb{S}^2$ (la esfera unitaria) que a cada punto p de S le asocia un vector unitario normal a S en p.



Localmente todas las superficies regulares admiten dos funciones de Gauss, correspondientes a las dos posibles direcciones del vector normal, pero a veces no es posible definir la función de Gauss globalmente: esto ocurre para las superficies no orientables, como la banda de Moebius.

Si ϕ es una parametrización local de S, podemos tomar $N(\phi(u,v)) = n(u,v) = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}$

Para cada punto p en S la derivada de N es una función lineal del plano tangente a S en p al plano tangente a S^2 en $N(p)$. Como los planos tangentes T_pS y $T_{N(p)}S^2$ son paralelos (ya que ambos son perpendiculares a $N(p)$) podemos identificarlos, y pensar que dN es una función lineal de T_pS a T_pS, conocida como el **operador de forma** de la superficie S. Observar que $dN(\phi_u) = n_u$ y $dN(\phi_v) = n_v$ y podemos escribir a estos vectores como combinaciones lineales de ϕ_u y ϕ_u:

$n_u = a_{11}\phi_u + a_{12}\phi_v$

$n_v = a_{21}\phi_v + a_{22}\phi_v$

Tomando productos punto obtenemos

$n_u \cdot \phi_u = a_{11}E + a_{12}F$ $\qquad$ $n_u \cdot \phi_v = a_{11}F + a_{12}G$

$n_v \cdot \phi_u = a_{21}E + a_{22}F$ $\qquad$ $dn_v \cdot \phi_v = a_{21}F + a_{22}G$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

Así que en la base de T_S formada por ϕ_u y ϕ_v, la derivada de la función de Gauss está dada por la matriz $dN = II_\phi I_\phi^{-1}$.

Por definición la función de Gauss y su derivada dN son independientes de la parametrización. Además los valores y vectores propios de una transformación lineal no dependen de la base. Como la matriz de dN es simétrica entonces tiene dos vectores propios, que son ortogonales. Los valores propios de dN son las curvaturas principales de S, y el determinante de dN (que es el producto de los valores propios) es la curvatura gaussiana de S:

$K = det(II_\phi)det(I_\phi^{-1}) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

Ejemplo. Para el paraboloide hiperbólico $\phi(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$

$$II_\phi \cdot I_\phi^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4u^2+1 & -4uv \\ -4uv & 4v^2+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8v^2+2}{4u^2+4v^2+1} & \frac{8uv}{4u^2+4v^2+1} \\ \frac{-8uv}{4u^2+4v^2+1} & \frac{-8u^2-2}{4u^2+4v^2+1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo. La **pseudoesfera** es una superficie de revolución parametrizada como

$\phi(u,v) = (sech(u)cos(v), sech(u)sen(v), u - tanh(u))$

Se puede checar que la primera forma fundamental es

$$I_\phi = \begin{bmatrix} tanh^2(u) & 0 \\ 0 & sech^2(u) \end{bmatrix}$$

y que la segunda forma fundamental es

$$II_\phi = \begin{bmatrix} -sech(u)tanh(u) & 0 \\ -0 & sech(u)tanh(u) \end{bmatrix}$$

así que la curvatura gaussiana es

$k(p) = detII_p/detI_p = -sech(u)tanh(u) \cdot sech(u)tanh(u)/sech^2(u)tanh^2(u) = -1$
por lo que la pseudoesfera es una superficie con curvatura constante negativa.

Problemas

13. Calcula las curvaturas principales y la curvatura gaussiana del toro de revolución parametrizado por $\phi(u,v) = ((R + rcos(u)) \cdot cos(v), (R + rcos(u) \cdot sen(v), rsen(u))$.

14. Muestra que se cumplen las siguientes igualdades, que usaremos pronto.

a.	$\phi_{uu} \cdot \phi_u = \frac{1}{2}E_u$	$\phi_{vu} \cdot \phi_u = \phi_{uv} \cdot \phi_u = \frac{1}{2}E_v$	$\phi_{uu} \cdot \phi_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$
b.	$\phi_{vv} \cdot \phi_v = \frac{1}{2}G_v$	$\phi_{uv} \cdot \phi_v = \phi_{vu} \cdot \phi_v = \frac{1}{2}G_u$	$\phi_{vv} \cdot \phi_u = F_v - \frac{1}{2}G_u$

El Teorema Egregio.

Uno de los mas famosos teoremas de la geometría diferencial dice que la curvatura gaussiana K de una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es un invariante intrínseco de la superficie.

Teorema Egregio de Gauss. Si dos superficies en $\mathbb{R}^3$ tienen la misma forma local intrínseca entonces tienen las mismas curvaturas gaussianas, independientemente de como estén encajadas en el espacio.

Como $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ para demostrar el teorema egregio basta ver que $LN - M^2$ puede calcularse a partir de E, F, G y sus derivadas (aunque ni L ni M ni N pueden calcularse así!).

Las segundas derivadas de ϕ en cada punto de S son vectores que pueden escribirse como combinaciones lineales de los vectores básicos ϕ_u, ϕ_v y n en el punto. Por definición las componentes en la dirección de n son L, M y N

$$\phi_{uu} = a\phi_u + b\phi_v + Ln$$

$$\phi_{uv} = \phi_{vu} = c\phi_u + d\phi_v + Mn$$

$$\phi_{vv} = e\phi_u + f\phi_v + Nn$$

donde a, b, c, d, e, f son algunas funciones de u y v.

Lema. Las funciones a, b, c, d, e, f dependen solamente de E, F, G y sus derivadas.

Demostración. Calculemos los productos punto de las expresiones anteriores con ϕ_u y ϕ_v:

$$\phi_{uu} \cdot \phi_u = a\phi_u \cdot \phi_u + b\phi_v \cdot \phi_u + Ln \cdot \phi_u \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}E_u = aE + bF$$

$$\phi_{uu} \cdot \phi_v = a\phi_u \cdot \phi_v + b\phi_v \cdot \phi_v + Ln \cdot \phi_v \quad \Rightarrow \quad F_u - \tfrac{1}{2}E_v = aF + bG$$

$$\phi_{uv} \cdot \phi_u = c\phi_u \cdot \phi_u + d\phi_v \cdot \phi_u + Mn \cdot \phi_u \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}E_v = cE + dF$$

$$\phi_{vu} \cdot \phi_v = c\phi_u \cdot \phi_v + d\phi_v \cdot \phi_v + Mn \cdot \phi_v \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}G_u = cF + dG$$

$$\phi_{vv} \cdot \phi_u = e\phi_u \cdot \phi_u + f\phi_v \cdot \phi_u + Nn \cdot \phi_u \quad \Rightarrow \quad F_v - \tfrac{1}{2}G_u = eE + fF$$

$$\phi_{vv} \cdot \phi_v = e\phi_u \cdot \phi_v + f\phi_v \cdot \phi_v + Nn \cdot \phi_v \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}F_v = eF + fG$$

Ahora tenemos 3 sistemas de ecuaciones lineales en las variables a, b, c, d, e, f y cuyos coeficientes son E, F, G y sus derivadas. Como $EG - F^2 \neq 0$, los 3 sistemas tienen soluciones únicas en función de los coeficientes. $\square$

Demostración del teorema egregio. Si n es un vector unitario normal a la superficie S entonces

$LN - M^2 = Ln \cdot Nn - Mn \cdot Mn =$

$= (\phi_{uu} - a\phi_u - b\phi_v) \cdot (\phi_{vv} - e\phi_u - f\phi_v) - (\phi_{vu} - c\phi_u - d\phi_v) \cdot (\phi_{vu} - c\phi_u - d\phi_v) =$

$= \phi_{uu} \cdot \phi_{vv} - \phi_{vu} \cdot \phi_{uv} - \phi_{uu} \cdot (e\phi_u - f\phi_v) - \phi_{vv} \cdot (a\phi_u - b\phi_v) + 2\phi_{vu} \cdot (c\phi_u + d\phi_v) +$
$+ (a\phi_u + b\phi_v) \cdot (e\phi_u + f\phi_v) + (c\phi_u + d\phi_v) \cdot (c\phi_u + d\phi_v)$

$= (\phi_{uu} \cdot \phi_v)_v - (\phi_{vu} \cdot \phi_v)_u +$ *productos de funciones de* E, F, G *y sus derivadas.*

Así que $LN - M^2$ es una suma de productos de E, F, G y sus primeras y segundas derivadas. $\square$

Dar una expresión explícita de K en términos de E,F y G en general es complicado, pero cuando $F = 0$ (si la parametrización es **ortogonal**) todo se simplifica y queda

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

El Teorema Egregio muestra que para las superficies en $\mathbb{R}^3$, la curvatura gaussiana sólo depende de la primera forma fundamental. Para otras superficies, donde la primera forma fundamental esta definida pero la segunda forma fundamental no lo está (como las superficies en $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$) la curvatura gaussiana *se define* usando esta fórmula.

Problemas

15. Calcula la curvatura gaussiana en el semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /y > 0\}$ con el producto interno dado por

    $I_\phi = \begin{bmatrix} 1/y2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{bmatrix}$

16. Considera la superficie en $\mathbb{R}^4$ parametrizada por

    $\phi(u, v) = (r \cdot cos(u), r \cdot sen(u), R \cdot cos(v), R \cdot sen(v))$

    a. Muestra que la superficie tiene la forma topológica de un toro (es homeomorfa al producto de 2 círculos).

    b. Calcula la primera forma fundamental. ¿Existe la segunda forma fundamental?

    c. Calcula el área.

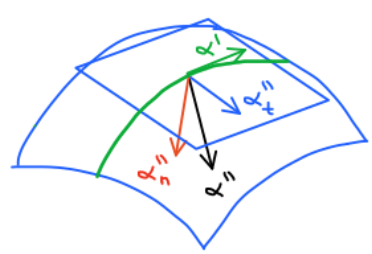
    d. Calcula la curvatura gaussiana.

Curvatura geodesica

Ahora queremos definir de manera intrínseca la curvatura de las curvas en una superficie regular S y ver que podemos definir de manera intrínseca las derivadas de los campos vectoriales tangentes a S.

Si $\alpha(t)$ es una curva en S parametrizada con rapidez constante $|\alpha'(t)| = 1$ entonces el vector $\alpha''(t)$ es normal a la curva pero no es necesariamente normal a la superficie. $\alpha''(t)$ puede descomponerse como la suma de un vector $\alpha''_n(t)$ normal a S y un vector $\alpha''_t(t)$ tangente a S.

Intuitivamente, $\alpha''_n(t)$ indica el cambio en la dirección de la curva necesario para que esta se mantenga en la superficie, mientras que $\alpha''_t(t)$ indica el cambio en la dirección de la curva en la superficie.



$k_n = |\alpha''_n|$ es la curvatura normal de la superficie en la dirección de la curva (que solo depende de S y de la dirección de la curva). $k_g = |\alpha''_t|$ es la **curvatura geodésica** de la curva en la superficie.

Lema. La curvatura geodésica solo depende de la geometría intrínseca de S.

Demostración. Sea $\alpha(t)$ una curva en S con $|\alpha'(t)| = 1$. Para una parametrización local $\phi : U \to S$, $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$. Tenemos que mostrar que la curvatura geodésica de $\alpha(t)$ se puede calcular a partir de $u(t), v(t)$ y de las funciones E, F, G y sus derivadas.

$\alpha'(t) = (\phi(u(t), v(t))' = \phi_u u'(t) + \phi_v v'(t)$

$\alpha''(t) = \phi_u u''(t) + \phi_{uu} u'(t)u'(t) + \phi_{uv} v'(t)u'(t) + \phi_v v''(t) + \phi_{vu} u'(t)v'(t) + \phi_{vv} v'(t)v'(t)$

Ahora la componente tangencial de $\alpha''(t)$ es la suma de las componentes tangenciales de los términos de la derecha, y en la prueba del teorema egregio vimos que las componentes tangenciales de ϕ_{vv}, ϕ_{vv} y ϕ_{vv} se pueden obtener de E, F y G y sus derivadas. $\square$

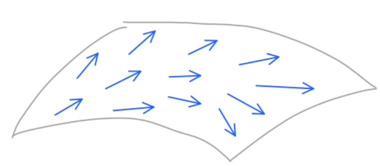
Diremos que una trayectoria $\alpha(t)$ en la superficie S es una **geodésica** si su curvatura geodésica en cada punto es 0. Las geodésicas son las trayectorias que se curvan menos en S, como las rectas en el plano.

Derivadas covariantes.

La derivada covariante es una generalización de la derivada usual de campos vectoriales en el plano a campos vectoriales tangentes a una superficie.

Recordar que si w es un campo vectorial derivable en el plano, la derivada de w en la dirección de un vector v basado en p, denotada por $d_v w$, es un vector basado en v que mide el cambio instantáneo de w en la dirección de v. $d_v w$ se obtiene tomando una curva $\alpha(t)$ que pase por p con velocidad v y derivando la composición $w(\alpha(t))$, es decir $d_v w = \frac{d}{dt} w(\alpha(t))$.

Un **campo vectorial tangente** a una superficie S es una función que le asigna a cada punto p de S un vector tangente $w(p)$.



El campo vectorial w es derivable en S si en coordenadas locales $w(\phi(u, v)) = f(u, v)\phi_u + g(u, v)\phi_v$ para un par de funciones derivables $f(u, v)$ y $g(u, v)$. Si v es un vector tangente a S en p entonces la derivada $d_v w$ es un vector que mide el cambio instantaneo de w en la dirección de v, pero $d_v w$ no tiene que ser tangente a S.

La **derivada covariante** $D_v w$ del campo vectorial w tangente a S en la dirección de un vector tangente v en p es la proyección ortogonal de la derivada usual $d_v w$ al plano tangente a S en p.

Lema. La derivada covariante $D_v w$ es una derivada intrínseca de S, en el sentido que solo depende del campo vectorial y de la geometría intrínseca de S.

Demostración. Es básicamente igual a la demostración de que la curvatura geodésica es intrínseca. Sea w un campo vectorial tangente a S y sea $\alpha(t)$ una curva en S con $\alpha'(t) = v$.

Para una parametrización local $\phi : U \to S$, $w(\phi(u, v)) = f(u, v)\phi_u + g(u, v)\phi_v$ y $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$.

Entonces $w(\alpha(t)) = f(u(t), v(t))\phi_u + g(u(t), v(t))\phi_v$ y

$d_v w = [f_u u' + f_v v']\phi_u + [g_u u' + g_v v']\phi_v + f(u, v)u'\phi_{uu} + f(u, v)v'\phi_{uv} + g(u, v)u'\phi_{vu} + g(u, v)v'\phi_{vv}$

$D_v w$ es la componente tangencial de $d_v w$, que es la suma de las componentes tangenciales de los términos de la derecha, por la prueba del teorema egregio las componentes tangenciales de ϕ_{vv}, ϕ_{vv} y ϕ_{vv} se pueden obtener de E, F y G y sus derivadas. □

Diremos que un campo vectorial tangente a la superficie S es **paralelo** a lo largo de una curva c si sus derivadas covariantes en la dirección de c se anulan. Así que una curva en S es una geodésica si el campo de vectores tangentes a la curva es paralelo.

Problemas

17. Calcula la curvatura normal y la curvatura geodésica de un círculo de radio r en una esfera de radio R

18. Si una superficie S en $\mathbb{R}^3$ contiene una línea recta l ¿Cual es la curvatura normal de S en la dirección de l? ¿Cual es la curvatura geodésica de l?

19. Muestra que si dos superficies regulares son tangentes a lo largo de una curva c, y c es geodésica en una de las superficies, entonces es geodésica en la otra.

La derivada covariante $D_v w$ es un vector tangente a la superficie, y si el campo w es unitario entonces $d_v w$ es ortogonal a w y por lo tanto $D_v w$ también es ortogonal a w, así que (como en el caso del plano) $D_v w$ es un múltiplo real del vector tangente a S que se obtiene rotando 90 grados a w. A ese múltiplo se le llama el valor algebraico de la derivada covariante, y se le denota por $[D_v w]$.

La curvatura de una curva $\alpha(t)$ en S parametrizada por longitud de arco es el valor algebraico de la derivada covariante $D_{\alpha'(t)}\alpha'(t)$.

Lema Si w_1 y w_2 son campos vectoriales unitarios tangentes a S a lo largo de una curva α recorrida con rapidez constante 1 entonces $[D_{\alpha'(t)}w_1] - [D_{\alpha'(t)}w_2] = \delta'(t)$ donde $\delta(t)$ es una función continua que mide el ángulo entre $w_1(\alpha(t))$ y $w_2(\alpha(t))$.

El lema dice que para cada campo vectorial unitario w a lo largo de una curva α, la derivada covariante $[D_{\alpha'(t)}w]$ mide como cambia el ángulo que forma w con un campo paralelo a lo largo de α.

Demostración. Si w_1^p es el vector tangente unitario a S que se obtiene girando 90 grados a w_1, entonces para cada punto de α

$[D_{\alpha'}\ w_1] = w_1' \cdot w_1^p$ (donde todas estas son funciones de t y α, que omitiremos)

y podemos escribir a w_2 en la base formada por w_1 y w_1^p como $w_2 = cos\delta\ w_1 + sen\delta\ w_1^p$

Entonces la derivada de w_2 en la dirección de α' es

$d_{\alpha'}\ w_2 = -sen\delta\ \delta'\ w_1 + cos\delta\ \delta'\ w_1^p + cos\delta\ w_1' + sen\delta\ w_1'^p$

$[D_{\alpha'}\ w_2]$ es el producto punto de $d_{\alpha'}\ w_2$ con el vector w_2^p que se obtiene girando 90 grados a w_2, es decir $w_2^p = -sen\delta\ w_1 + cos\delta\ w_1^p$.

Como w_1 y w_1^p son unitarios y ortogonales $w_1' \cdot w_1 = w_1^{p\prime} \cdot w_1^p = 0$ $w_1' \cdot w_1^p = -w_1 \cdot w_1^{p\prime}$ así que

$$
\begin{aligned}
[D_{\alpha'}\ w_2] &= d_{\alpha'}\ w_2 \cdot w_2^p = \\
&= (-sen\delta\ \delta'\ w_1 + cos\delta\ \delta'\ w_1^p + cos\delta\ w_1' + sen\delta\ w_1^{p\prime}) \cdot (-sen\delta\ w_1 + cos\delta\ w_1^p) = \\
&= sen^2\delta\ \delta'\ w_1 \cdot w_1 + cos^2\delta\ \delta'\ w_1^p \cdot w_1^p + cos^2\delta\ \ w_1' \cdot w_1^p + sen^2\delta\ \ w_1' \cdot w_1^p \\
&= \delta' + w_1^{p\prime} \cdot w_1 = \delta' + [D_{\alpha'}\ w_1].
\end{aligned}
$$

□

El lema anterior dice que podemos calcular la derivada covariante de un campo si conocemos la de otro y el ángulo que forman.

Consideremos el campo vectorial unitario en la dirección de ϕ_u dado por $e_1 = \frac{\phi_u}{\sqrt{E}}$.

Un campo vectorial tangente a S y ortogonal a ϕ_u es $\phi_v - \frac{\phi_u \cdot \phi_v}{\phi_u \cdot \phi_u}\phi_u = \frac{\phi_u \cdot \phi_u\ \phi_v - \phi_u \cdot \phi_v\ \phi_u}{\phi_u \cdot \phi_u}$ cuya norma es $\sqrt{\frac{E^2G - 2EF^2 + F^2E}{E^2}} = \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}$.

Así que un campo vectorial unitario tangente a S y normal a e_1 es $e_2 = \frac{E\phi_v - F\phi_u}{\sqrt{E}\sqrt{EG-F^2}}$.

Como e_1 y e_2 son ortogonales y unitarios, para cualquier curva $\alpha(t)$ en S recorrida con rapidez constante 1 se tiene que $[D_{\alpha'}e_1] = e_1' \cdot e_2$.

Lema. Sea $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ es una parametrización local de la superficie S. Si una curva c en V bordea una región R homeomorfa a un disco, entonces $\int_c [D_{\alpha'}e_1] = -\iint_R K$.

Demostración. Podemos parametrizar a c como $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t)$ para $t \in [a,b]$ entonces

$$\int_c e_2 \cdot e_1' = \int_{[a,b]} e_2(t) \cdot (e_1'(t))dt = \int_{[a,b]} e_2 \cdot (e_1)_u\ u' + e_2 \cdot (e_1)_v\ v'dt =$$

$$= \int_{\phi^{-1}(c)} e_2 \cdot (e_1)_u\ du + e_v \cdot (e_1)_v\ dv$$

El teorema de Green dice que si R es una región del plano entonces $\int_{\partial R} Pdu + Qdv = \iint_R \frac{dQ}{du} - \frac{dP}{dv}dudv$ así que la integral anterior es igual a

$$\iint_{\phi^{-1}R} (e_2)_u \cdot (e_1)_v - (e_2)_v \cdot (e_1)_u \; dudv$$

Pero $(e_2)_u \cdot (e_1)_v - (e_2)_v \cdot (e_1)_u = (e_2)_u \cdot (e_1)_v - (e_2)_v \cdot (e_1)_u$

y usando los valores de e_1 y e_2 se puede calcular que esto es igual a $\frac{LN-M^2}{\sqrt{EG-F2}} = K\sqrt{EG-F2}$.

así que la integral anterior es igual a

$$\iint_{\phi^{-1}R} K\sqrt{EG-F2} = \iint_R K$$

. □

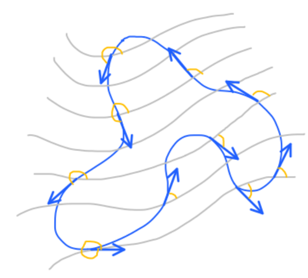
Teorema de Gauss Bonnet (local) Si $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ es una parametrización local de la superficie S y la curva c en V bordea una región simple R entonces

$$\int_c k_g + \iint_R K = 2\pi$$

Demostración. Si $\alpha : [a,b] \to c$ una parametrización de la curva c con rapidez constante 1 y $w(t) = \alpha'(t)$ entonces $k_g = [D_{\alpha'(t)}w] = [D_{\alpha'(t)}e_1] + \delta'$, donde $\delta(t)$ mide el angulo que forma $\alpha'(t)$ con $\phi_u(t)$.

Por el lema anterior

$\int_c k_g = \int_c [D_{\alpha'(t)}w] = \int_c [D_{\alpha'(t)}e_1] + \int_c \delta' = \int_R K + \delta(b) - \delta(a)$



Como al dar la vuelta completa a la curva los vectores $w(t)$ y $e_1(t)$ regresan a su posición original, el teorema del giro de las tangentes muestra que $\delta(b) - \delta(a) = 2\pi$.

□

El teorema de Gauss Bonnet se extiende a curvas con esquinas igual que el teorema del giro de las tangentes:

Teorema de Gauss Bonnet (local) Si $\phi : A \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ es una parametrización local de la superficie S y la curva c en V bordea una región simple R entonces

$$\int_c k_g + \iint_R K + \sum \theta_i = 2\pi$$

Corolario Si Δ es un triangulo geodésico en la superficie regular S y los ángulos internos de Δ son α, β y γ entonces

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_{\Delta} K$$

En particular, si le curvatura gaussiana de S dentro de Δ es positiva la suma de los ángulos es mayor que π, y si la curvatura gaussiana es negativa la suma es menor que π.

Problemas

20. Si $\alpha : [a, b] \to S$ es una curva en una superficie y v_0 es un vector tangente a S en $\alpha(a)$ el **transporte paralelo** de v a lo largo de $\alpha(t)$ es un campo vectorial $v(t)$ cuya derivada covariante se anula a lo largo de α. Si la curva es cerrada, $\alpha(b) = \alpha(a)$, pero es posible que $v(b) \neq v(a)$.

    Muestra que si la curva α bordea una región simple R en S entonces el ángulo entre $v(a)$ y $v(b)$ es $\iint_R K$.

21. Muestra que si una superficie S tiene la forma topológica de un plano y su curvatura gaussiana es menor o igual a 0 en todos los puntos, entonces las geodésicas en S se tocan a lo mas en un punto.

22. Muestra que en una superficie con curvatura gaussiana positiva la curvatura total de cada círculo es menor que 2π, y en una superficie con curvatura gaussiana positiva la curvatura total de cada círculo es mayor que 2π.